NOVEMBER/DECEMBER 2025

FMA52/CMA52 — REAL ANALYSIS – I

Time : Three hours | Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

1. Define Sequence.

   வரிசைமுறைய வரையறு.

2. Define Equivalence.

   சமநிலையை வரையறு.

3. Define Divergent Sequence.

   வேறுபட்ட வரிசைமுறையை வரையறு.

4. Define Limit Superior.

   உயர்ந்த வரம்பை வரையறு.

5. Define Alternating Series.

   மாற்றுத் தொடரை வரையறு.

6. Define Absolute Convergence.

   முழுமையான குவிப்பை வரையறு.

7. Define Metric Space.

மெட்ரிக் இடத்தை வரையறு.

8. Define limit of a function.

ஒரு செயல்பாட்டின் வரம்பை வரையறு.

9. Define Open Set.

திறந்த தொகுப்பை வரையறுக.

10. Write the definition of Continuity.

தொடர்ச்சியின் வரையறையை எழுதுக.



SECTION B — (5 × 5 = 25 marks)

Answer ALL questions.

11. (a) If $f: A \to B$ and $X \subset A, \gamma \subset A$ then prove that $f(X \cup \gamma) = f(X) \cup f(\gamma)$.

$f: A \to B$ மற்றும் $X \subset A$, $\gamma \subset A$ எனில் $f(X \cup \gamma) = f(X) \cup f(\gamma)$ என நிறுவுக.

Or

(b) If $A_1, A_2, \ldots$ countable set then $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ is countable.

$A_1, A_2, \ldots$ எண்ணத்தக்கது எனில் $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ எண்ணத்தக்கது என்பதை நீரூபிக்கவும்.

19. Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converges.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ தொடர் ஒன்றிணைகிறது என்பதை நிரூபி.

20. If the subset A of a metric space $< M, \rho >$ is totally bounded then A is bounded.

மெட்ரிக் இடைவெளியின் துணைக்கணம் A, $< M, \rho >$ முழுமையாக A வரம்புக்குட்பட்டால் வரம்பிடப்படும் என்பதை நிரூபி.



12. (a) Prove that a non-decreasing sequence which is not bounded above diverges to infinity.

மேல் வரம்பற்ற அதிகரிக்காத தொடர் வரிசை முடிவிலியில் விரியாத தொடர் வரிசை எனக் காட்டுக.

Or

(b) If $S = \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of real numbers then prove that 'S' has a monotone subsequence.

$S = \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது மெய் எண்களின் வரிசை எனில், 'S' ஒரு ஒற்றைத் தொனித் தொடர்வரிசையைக் கொண்டுள்ளது என்பதை நிரூபிக்கவும்.

13. (a) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent series then $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பது ஒரு குவிந்த தொடராக இருந்தால், $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ என்பதை நிரூபி.

Or

(b) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ is divergent.

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}\right)$ என்ற கூட்டுத் தொடர் ஒரு விரி தொடர் என நிறுவுக.

14. (a) If $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ is a non-decreasing sequence of positive numbers and if $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ diverges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverges.

$\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது நேர்மறை எண்களின் குறையாத வரிசையாக இருந்தால், $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ வேறுபட்டால் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ வேறுபட்டது என்பதை நிரூபி.

Or

(b) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is $(C_1,1)$ summable and if $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என்பது $(C_1,1)$ சுருக்கக்கூடியதாக இருந்தால், $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$ எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ குவிகிறது எனக்காட்டுக.

15. (a) Let M be a metric space M is complete if for every sequence (F_n) of nonempty closed subsets of M such that $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots\dots \supseteq F_n \supseteq \dots\dots\dots$ then $\cap F_n$ is non empty.

M என்பது ஒரு மெட்ரிக் இடைவெளியாக இருக்கட்டும், M இன் காலியாக இல்லாத மூடிய துணைக் கணங்களின் ஒவ்வொரு வரிசைக்கும் (F_n) அதாவது $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots\dots \supseteq F_n \supseteq \dots\dots\dots$ பின்னர் $\cap F_n$ காலியாக இல்லை என்பதை நிரூபி.

Or

Shanmuga Industries Arts & Science College
T.V.Malai

(b) The metric space $< M, \rho >$ is compact if ever sequence of points in M has a subsequence converging to a point in M.

M இல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளி வரிசையும் M இல் உள்ள ஒரு புள்ளியுடன் ஒன்றிணைக்கும் ஒரு தொடர்ச்சியைக் கொண்டிருந்தால் மெட்ரிக் இடைவெளி $< M, \rho >$ சுருக்கமானது என்பதை நிரூபி.

SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. Prove that the sequence $\left[\frac{n}{n^2+1}\right]$ is convergent.

$\left[\frac{n}{n^2+1}\right]$ வரிசை ஒருமுகமானது என்பதை நிரூபிக்கவும்.

17. Prove that a non-decreasing sequence which is bounded above is convergent.

இறங்கும் தொடர் வரிசையானது மேல் வரம்புள்ளது ஒருங்கும் என நிறுவுக.

18. If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges absolutely, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ முழுமையாக குவிந்தால், $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஒன்றிணைகிறது என நிறுவுக.